Bibliographie

Ewald Burger, Einführung in die Theorie der Spiele. Mit Anwendungsbeispielen, insbesondere aus Wirtschaftslehre und Soziologie, 169 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1959.

Trotz seinem bescheidenen Umfang, ist das Buch von E. BURGER eine inhaltsreiche und moderne Zusammenfassung der von J. v. NEUMANN begründeten Spieltheorie.

In zahlreichen Gebieten des gesellschaftlichen Lebens, meistens im Wirtschaftsleben, kommen Probleme vor, in den das Interesse der Teilnehmer (der sogenannten „Spieler") miteinander in scharfem Konflikt stehen. Die Spieler müßen, manchmal auf Grund unvollständiger Information, nach gewißen Regeln Entscheidungen wählen, und ihr Gewinn oder Verlust werden durch diese Entscheidungen und durch gewisse Zufallsereignisse bestimmt. Die Interessenkonflikte lassen sich oft durch ein Strategiespiel darstellen. Ziel der Spieltheorie ist die Entscheidungen der Spieler mathematisch zu begründen.

Das Buch besteht aus vier Kapiteln und einem Anhang. Der erste Kapitel führt den Leser stufenweise, mit dem intuitiven Begriffe der Strategie beginnend, durch Beispiele mit wachsender Komplexheit auf die exakten mathematischen Definitionen des allgemeinen Spielbegriffes. Die in diesem Teile auftretenden Beispiele werden später neben anderen Anwendungsbeispielen ausführlich behandelt.

Der II. Kapitel behandelt die nichtkooperative Theorie der n-Personenspiele. Hier wird das Problem der exakten Definition des zunächst vagen Begriffes des rationalen Verhaltens der Spielgesellschaft angeworfen und mit dem Begriff des Gleichgewichtspunktes in Verbindung gesetzt; wenn n—1 Spieler der Gesellschaft sich an eine Gleichgewichtstrategie halten, so kann der n-te Spieler nicht besseres tun, als sich zu dieser Vereinbarung der anderen anzuschließen. Die Existenzsätze von ZERMELO—v. NEUMANN—KUHN (für endliche Spiele mit vollständiger Information) bzw. von NAKAIDO—ISODA (für gewisse kontinuierliche Spiele) sind vom Verfasser für gemischten Erweiterungen kontinuierlicher Spiele verallgemeinert. Der Satz von GALE erweitert den Existenzsatz für verallgemeinerte Spiele.

Der Verfasser führt den Leser durch einen deduktiven Weg zu den Zweipersonen—Nullsummen-Spielen, die den Gegenstand des III. Kapitels bilden. Nach dem Beweis des Minimax-Satzes von v. NEUMANN (für Spiele mit vollständiger Information) und des Neumannschen Hauptsatzes (für Matrixspiele) bekommt man als Folgerungen die Sätze von BOHNENBLUST—KARLIN—SHAPLEY (für Konvexspiele), von VILLE (für kontinuierliche Spiele) und von WALD (für Strategien mit beschränkter Dichte).

Wegen der Wichtigkeit der Matrixspiele ist ein schöner Paragraph für sie gewidmet. Nach dem elementaren Beweis des Neumannschen Hauptsatzes (der erste Beweis des Buches stützt sich auf den Brouwerschen Fixpunktsatz), wird die Frage behandelt, wie der Wert des Spieles und die optimale Strategien für beide Spieler ermittelt werden können. Diese Aufgabe läßt sich als ein Paar von dualen linearen Optimierungsaufgaben auffassen, deswegen wird auch die Simplex-Methode von DANTZIG hier behandelt. Andererseits zeigt ein Satz von DANTZIG, daß man jedes Paar zueinander dualer linearer Programme auf ein Matrixspiel zurückführen kann. Als Beispiel für die nicht elementare Anwendungen von Matrixspielen wird ein Modell einer expandierenden Wirtschaft von v. NEUMANN behandelt. Einige unendliche Zweipersonen—Nullsummen-Spiele schließen diesen Hauptteil des Buches.

Der letzte Kapitel ist der kooperativen Theorie allgemeiner Spiele gewidmet. Diese Theorie stützt sich auf die Arbeiten von v. NEUMANN, MORGENSTEIN und SHAPLEY. Die Existenz einer Lösung im Sinne des Neumannschen Lösungsbegriffes ist noch im allgemeinen nicht entschieden wohl aber im Falle von gewissen speziellen Spielklassen, z. b. bei SHAPLEYS Marktmodell und bei einer Klasse von $(n; k)$ Majoritätspielen von BOTT. Der letzte Paragraph ist dem Shapley-Wert der Spiele gewidmet.

Der Anhang enthält die Beweise der benötigten topologischen Hilfsmittel (des Spernerschen Lemmas, des Satzes von KNASTER—KURATOWSKI—MAZURKIEWICZ und der Fixpunktsätze von BROUWER und KAKUTANI).

L. Stachó (Szeged)

H. S. Ruse—A. G. Walker—T. J. Willmore, Harmonic spaces (Consiglio Nazionale delle Ricerche, Monografie Matematiche, 8), XII+240 pages, Roma, Edizioni Cremonese, 1961.

In this book the interested reader will find an excellent exposition of the fundamental results achieved in the past 25 years by a number of geometers on the theory of harmonic spaces. The monograph can serve as an introduction to a subject, which is, approximatively described, the study of a certain second-order partial differential equation, the generalized Laplace equation, in the framework of Riemannian spaces.

Roughly speaking, an analytic Riemannian manifold is a harmonic space H_n, if every point $P_0 \in H_n$ is the origin of a normal neighbourhood N, in which the Laplace equation $\Delta u=0$ possesses a non-constant analytic solution, depending on the distance function $\Omega(P_0, P)$ only. This latter is the scalar function of P_0 and P, taking the value $\frac{1}{2} er^2$, where e is the indicator ($e=\pm 1$ or 0) and r measures the length of that geodesic arc P_0P which lies in N. Every R_n of constant curvature, for example, turns out to be an H_n.

An important subclass of harmonic spaces is that of the simply harmonic spaces $\{SH_n\}$. These are characterized by the property that $\chi(\Omega)=\Delta\Omega$ is constant. A criterion for an SH_n is that $\chi(\Omega)=n$ identically on the manifold. Locally flat manifolds, for example, belong to $\{SH_n.\}$

A set of conditions for an H_n is, in terms of the curvature tensor, an infinite sequence, which can be given by recurrence formulae. These involve the components of the curvature tensor together with those of its successive covariant derivatives. The first condition in the above sequence restricts the set of H_n's to a subclass of Einstein manifolds ($R_{ij}=\text{const.}\, g_{ij}$).

The conditions for an H_n will be considerably simplified by assuming the space to be symmetric in CARTAN's sense (the curvature tensor is covariant-constant). In this case the set of conditions reduces to a system of algebraic equations in the components of g_{ij} and R_{ijkl}, which is solvable under certain conditions. For example, a complete classification in terms of canonical forms is possible for symmetric harmonic spaces in dimension 4. By means of technique used in the theory of Lie groups certain harmonic symmetric spaces can be constructed.

Another class of Riemannian spaces having significance for harmonic theory is that of recurrent spaces (the curvature tensor has the form $R_{ijkl|m}=R_{ijkl}\varkappa_m$, where $\varkappa_m$ is the recurrence vector field). The infinite sequence of conditions for a harmonic space of recurrent type is again equivalent to a finite set of algebraic equations. A canonical form for the metric of general recurrent spaces can be constructed, which leads, among others, to the determination of all harmonic recurrent spaces. Examples show that among these spaces there are non-symmetric ones.

The reader is assumed to have some knowledge in tensor calculus. All other notions and kinds of technique required are described in the book.

The richness of results together with the high quality of presentation will surely awake interest in many readers, experts or beginners, for this important chapter of classical differential geometry.

The book contains a bibliography of all papers on harmonic spaces up to 1961.

G. Soós (Szeged)

L. Fuchs, Partially Ordered Algebraic Systems (International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, Vol. 28), IX+229 pages, Oxford—London—New York—Paris, Pergamon Press, 1963.

In den letzten Jahren nahm die Theorie der teilweise geordneten algebraischen Strukturen eine schwungvolle Entwicklung, die zur Folge ergab, daß in diesem Gebiet eine Reihe von neue Ergebnisse enthaltenden Arbeiten erschien. Dieses Buch liefert uns eine sehr elegante systematische Behandlung nicht nur der klassischen, aber auch der neuesten Resultate in dem im Titel genannten Gegenstand.

Nach einem einführenden Kapitel, in dem die Grundbegriffe u. a. die teilweise geordneten algebraischen Strukturen definiert sind, ist das Buch in drei Teile geteilt.

Im ersten Teil beschäftigt sich der Verf. mit teilweise geordneten Gruppen. Nach einigen Vorbereitungen sind in diesem Teil das direkte Produkt, das lexikographische Produkt und die Ordnungstopologie für teilweise geordnete Gruppen definiert und die Frage der Fortsetzung einer teilweisen Anordnung solcher Gruppen zu einer vollständigen Anordnung entwickelt. Ferner sind die linear angeordneten Gruppen, die Gruppen, deren jede teilweise Anordnung sich zu einer vollständigen Anordnung erweitern läßt, die archimedisch angeordneten Gruppen, die Bewertung von vollständig geordneten abelschen Gruppen und die zyklisch angeordneten Gruppen untersucht. In diesem Teil sind noch viele interessante Resultate für die Verbandsgruppen enthalten.

Der zweite Teil behandelt analoge Untersuchungen für teilweise geordnete Ringe und Schiefkörper. Hier findet man auch eine Behandlung der Anordnung des Quotientenringes, der reell abgeschlossenen Körper, der vollständig geordneten Ringe (darunter der archimedisch angeordneten Ringe) und Schiefkörper. Dieser Teil findet seinen Abschluß mit Untersuchungen für die Verbandsringe.

Im dritten Teil werden die teilweise geordneten Halbgruppen untersucht. Hier ist die Frage über die Fortsetzung der Anordnung einer Halbgruppe zur Anordnung ihrer Quotientengruppe behandelt und es werden außerdem die vollständig geordneten Halbgruppen, die Unterhalbgruppen der additiven Gruppe der reellen Zahlen und eine spezielle Klasse vollständig geordneter Gruppoiden betrachtet. Ferner sind zahlreihe Resultate für Verbandshalbgruppen diskutiert.

Dem Verf. ist es gelungen, die Theorie der teilweise geordneten algebraischen Strukturen verschiedener Art von einem sehr einheitlichen Gesichtspunkt aus aufzubauen.

Dem Buch ist ein reichhaltiges Literaturverzeichnis beigefügt und es werden insgesamt 40 interessante offene Probleme aufgeworfen.

I. Peák (Szeged)

L. Fejes Tóth, Reguläre Figuren, 316 Seiten, Budapest und Leipzig, Gemeinschaftsausgabe des Akadémiai Kiadó und der B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1965.

Die Theorie der regulären Figuren ist im Grunde genommen eine der ältesten Theorien der Mathematik. Es ist wahrlich so und doch ist das Buch des Verfassers durch und durch modern. Es besteht aus zwei Teilen: Teil I behandelt die Systematologie und Teil II die Genetik der regulären Figuren. Diese beiden Gesichtspunkte zusammenzuschließen und hiermit die Grundlage einer einheitlichen, umfaßenden Theorie der regulären Figuren zu schaffen ist das Hauptziel des Verfassers. Schon das erste Kapitel ist eine auch didaktisch sehr wertvolle Auseinandersetzung der kongruenten Transformationen der Ebene: der Verfasser weist mit neuartigen elementaren geometrischen und gruppentheoretischen Methoden auf bekannte Tatsachen hin und versäumt nirgends seine Behauptungen mit künstlerischen und kunstgeschichtlichen Illustrationen zu veranschaulichen. Es wird somit die Behauptung von Hermann Weyl bestätigt: „Die Kunst der Ornamente enthält in impliziter Form die ältesten Kenntnisse aus dem Gebiet der höheren Mathematik."

Kapitel 2 behandelt — weniger eingehend — die änhlichen Probleme für den Raum. Kapitel 3 betrachtet die hyperbolische Ebene. Es wird eine didaktisch wertvoller und in sener Neuart schöner Aufbau der hyperbolischen Geometrie gegeben, ihrer Würde nach hochschätzend die Entdeckung von Johann Bolyai. Unter dem Titel „Polyeder" folgt die Behandlung der verschiedenen Arten von regulären Polyedern und danach werden entsprechende Probleme für mehrdimensionale Räume betrachtet.

Der zweite Teil — die Genetik — ist natürlich weniger ausführlich und mehr mosaikartig, demgegenüber bringt er eine Fülle von Problemen und Anregungen für den Forscher. Es folgen schöne und lehrreiche Abschnitte über Packungs- und Überdeckungsprobleme, Isoperimetrische Probleme in Zellenaggregaten, Packungen und Überdeckungen durch inkongruente Kreise.

Wertvoll sind die vom Verfasser bereits gewohnten Schlußkapitel, unter dem Titel „Anmerkungen", in welchen er in das Geschichtliche der Probleme hineinleuchtet.

Das Ziel des Verfassers wurde erreicht: sein Buch ist schön, interessant und leicht verständlich.

J. Berkes (Szeged)